第42卷 第3期
2022年6月

桂林电子科技大学学报
Journal of Guilin University of Electronic Technology

Vol. 42, No. 3
Jun. 2022

一类线性权互补问题的修正全牛顿步可行内点算法

吴昕阳，张睿婕，迟晓妮，王博妲

（桂林电子科技大学 数学与计算科学学院，广西 桂林 541004）

摘　要：作为互补问题的推广，权互补问题是一种重要的优化问题，可以建模一大类经济金融中的实际均衡问题。由于非零权向量的存在，权互补问题比互补问题复杂得多，因而目前关于权互补问题的算法并不多见。将线性优化的内点算法推广到权互补问题。基于中心路径的等价变换，提出求解非负象限上一类线性权互补问题的修正全牛顿步可行内点算法。在每次迭代时，算法无需进行线性搜索。在适当假设下，证明了算法的可行性，得到了算法的迭代复杂度。数值实验结果表明了算法的有效性。

关键词：权互补问题；修正全牛顿步；可行内点算法；迭代复杂度

中图分类号：O221　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-808X(2022)03-0217-06

A full-modified-Newton step feasible interior-point algorithm for a class of linear weighted complementarity problems

WU Xinyang, ZHANG Ruijie, CHI Xiaoni, WANG Boda

(School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: As the extension of a complementarity problem, the weighted complementarity problem is an important kind of equilibrium problem, which could be used to model a larger class of practical equilibrium problems in economy and finance. Because of the nonzero weight vector, the weighted complementarity problem is usually more complicated than the complementarity problem. There is little available work about the algorithms for the weighted complementarity problem. In this paper, an interior-point algorithm is extended from linear optimization to weighted complementarity problems. Based on an equivalent reformulation of central path, a full-modified-Newton step feasible interior-point algorithm is proposed for solving a class of linear weighted complementarity problems over the nonnegative orthant. There is no linear search at each iteration. Under appropriate assumptions, we prove the feasibility of the algorithm, and obtain the iteration complexity. The numerical results illustrate that the algorithm is effective.

Key words: weighted complementarity problem; full-modified-Newton step; feasible interior-point algorithm; iteration complexity

权互补问题(weighted complementarity problem，简称WCP)是一类新的优化问题，目前关于权互补问题的理论和算法研究较少。Potra[1]最先提出权互补的概念，即找到一对属于一个流形与一个锥的交集的向量，使得它们在某个代数中的乘积等于一个给定的权向量。当权向量为零向量时，权互补问题退化为互补问题。Potra[1]将Fisher市场均衡问题、二次规划与权中心问题转化为单调线性权互补问题，并提出了求解单调线性权互补问题的2种内点算法。之后，Potra[2]又证明了充分线性权互补问题的一些基本结论，设计了一种校正-预估内点算法。目前，光滑牛顿法[3,9]和内点算法[10]是求解线性优化、互补问题[11-12]和权互补问题[13]等的有效算法，其中内点算法由于具有多项式时间复杂度[14]而备受关注。Koji-

收稿日期：2021-12-11

基金项目：国家自然科学基金(11861026)；广西自然科学基金(2021GXNSFAA220034)；广西大学生创新训练计划(202010595105)；桂林电子科技大学研究生教育创新计划(2022YCXS148)

通信作者：迟晓妮(1979－)，女，教授，博士，研究方向为最优化理论与算法。E-mail:chixiaoni@126.com

引文格式：吴昕阳，张睿婕，迟晓妮，等. 一类线性权互补问题的修正全牛顿步可行内点算法[J]. 桂林电子科技大学学报，2022，42(3)：217-222.

ma 等[4-5]给出了线性互补问题的原对偶内点算法及其复杂度。Roos 等[6]首次提出了线性规划的全牛顿步可行内点算法。随后,Zhang 等[7]基于修正牛顿方向提出了新的全牛顿步可行内点算法。Xu[8]给出了线性规划的基于修正全牛顿方向的不可行内点算法,并证明了该算法在适当条件下具有良好的复杂度上界。Asadi 等[15]提出了求解单调线性权互补问题的全牛顿步可行内点算法。

鉴于此,基于 Xu[8]提出的修正全牛顿步,提出一种求解非负象限上线性权互补问题(LWCP)的可行内点算法。本算法采用修正全牛顿步,避免了线性搜索,简化了算法分析,且保证了迭代点都位于中心路径的窄邻域内,最后分析了算法的可行性、收敛性及复杂度。数值算例结果表明,本算法是有效的。

1 权互补问题

考虑 $\mathbf{R}^n$ 上的 LWCP[1]:找到一向量对 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ 使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{xs}=\boldsymbol{\omega},\end{cases}\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$,$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$,$\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{\omega}\in\mathbf{R}^n_+$。当 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$ 时,WCP 退化为互补问题。

定义 LWCP(1)的严格可行域为

$$F^0=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathbf{R}^n_{++}\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n_{++}\ \middle|\ \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{xs}>\boldsymbol{\omega}\right\}。$$

1.1 中心路径及搜索方向

由于直接求解 LWCP(1)比较困难,用 $\boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}=\mu\boldsymbol{e}$ 代替 $\boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$,求解方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}=\mu\boldsymbol{e}。\end{cases}\tag{2}$$

假定 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩矩阵,即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m$。若内点条件(IPC)[6]成立,即 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\boldsymbol{F}^0$,则对任意参数 $\mu>0$,方程组(2)有唯一解 $(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{s}(\mu))$,称之为 LWCP(1)的 μ-中心。所有 μ-中心的集合 $\{(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{s}(\mu))\mid\mu>0\}$ 称为 LWCP(1)的中心路径。当 $\mu\to 0$ 时,中心路径的极限点便是 LWCP(1)的最优解。当 $\boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}\geqslant\boldsymbol{0}$ 时,定义

$$\boldsymbol{v}:=\sqrt{\frac{\boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}}{\mu}}。\tag{3}$$

当 $\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}$ 时,易证

$$\boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}=\mu\boldsymbol{e}\Leftrightarrow\boldsymbol{v}^2=\boldsymbol{e}\Leftrightarrow\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}\Rightarrow\boldsymbol{v}^2=\boldsymbol{v}。$$

则方程组(2)可化为

$$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}=\mu^+\boldsymbol{v},\end{cases}\tag{4}$$

其中,$\mu^+=(1-\theta)\mu$,$\theta\in(0,1)$。因而,通过求解方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{s}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\Delta\boldsymbol{s}=\mu^+\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}),\end{cases}\tag{5}$$

可得牛顿搜索方向 $(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{s})$。

定义

$$\boldsymbol{d}_x=\frac{\boldsymbol{s}\Delta\boldsymbol{x}}{\mu\boldsymbol{v}},\ \boldsymbol{d}_s=\frac{\boldsymbol{x}\Delta\boldsymbol{s}}{\mu\boldsymbol{v}}。\tag{6}$$

由式(3)、(6),方程组(5)可化为

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{d}_x=\boldsymbol{0},\\ \dfrac{1}{\mu}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}+\boldsymbol{d}_s=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{d}_x+\boldsymbol{d}_s=(1-\theta)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v},\end{cases}\tag{7}$$

其中,$\bar{\boldsymbol{A}}:=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{V}:=\mathrm{diag}(\boldsymbol{v})$,$\boldsymbol{X}:=\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$。由方程组(7)易知,$\boldsymbol{d}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_s=\boldsymbol{0}$。

定义邻近测度

$$\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s};\mu):=\delta(\boldsymbol{v})=\|\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}\|。\tag{8}$$

引理 1[6] 若 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 正交,则

$$\|\boldsymbol{uv}\|_\infty\leqslant\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2,\ \|\boldsymbol{uv}\|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2。$$

因为 $\boldsymbol{d}_x$ 与 $\boldsymbol{d}_s$ 正交,由引理 1 和式(8)可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty&\leqslant\frac{1}{4}\|\boldsymbol{d}_x+\boldsymbol{d}_s\|^2=\frac{1}{4}\|(1-\theta)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}\|^2=\\&\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n(1-v_i-\theta)^2=\\&\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^n(1-v_i)^2-2\theta\sum_{i=1}^n(1-v_i)+n\theta^2\right]\leqslant\\&\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^n(1-v_i)^2+2\theta\|\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}\|_1+n\theta^2\right]\leqslant\\&\frac{1}{4}\left[\|\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}\|_2^2+2\theta\sqrt{n}\|\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}\|+n\theta^2\right]=\\&\frac{1}{4}(\delta(\boldsymbol{v})+\sqrt{n}\theta)^2。\end{aligned}\tag{9}$$

同理可得

$$\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}(\delta(\boldsymbol{v})+\sqrt{n}\theta)^2(*)。$$

引理 2[7] 对任意 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^n$,有

$$1-\delta(\boldsymbol{v})\leqslant v_i\leqslant 1+\delta(\boldsymbol{v}),i=1,2,\cdots,n。$$

1.2 修正全牛顿步可行内点算法

设 $\mu^0>0$，$(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{s}^0)\in\boldsymbol{F}^0$，选择适当参数 θ，ε,τ，使得

$$\delta(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{s}^0,\mu^0)\leqslant\tau。$$

在修正全牛顿步中，求解方程组(5)得牛顿搜索方向 $(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{s})$，其中 $\mu^+=(1-\theta)\mu,\theta\in(0,1)$。令新迭代点

$$\boldsymbol{x}^+:=\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}^+:=\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{s}^+:=\boldsymbol{s}+\Delta\boldsymbol{s}\tag{10}$$

满足内点条件，且

$$\delta(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{s}^+;\mu^+)\leqslant\tau，$$

当 $\|\boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}\|\leqslant\varepsilon$ 时，算法迭代终止。

算法 1 求解 LWCP 的修正全牛顿步可行内点算法

1)选择参数 $\mu^0>0$，$\varepsilon>0$，$\tau\in(0,1)$，$\theta\in(0,1)$，初始点 $(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{s}^0)\in\boldsymbol{F}^0$，使得 $\delta(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{s}^0;\mu^0)\leqslant\tau$。置 $k:=0$。

2)当 $\|\boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}\|\leqslant\varepsilon$ 时，算法终止，否则，转步骤 3)。

3)求解方程组(5)，得搜索方向 $(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{s})$。令

$$\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}:=\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y},$$
$$\boldsymbol{s}:=\boldsymbol{s}+\Delta\boldsymbol{s},$$
$$\mu:=(1-\theta)\mu。$$

置 $k:=k+1$，转步骤 2)。

2 算法分析

2.1 可行性和收敛性分析

引理 3 若 $\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty<(1-\theta)(1-\delta(\boldsymbol{v}))$，则 $(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{s}^+)\in\boldsymbol{F}^0$。

证明 令 $\alpha\in[0,1]$，记

$\boldsymbol{x}(\alpha)=\boldsymbol{x}+\alpha\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\alpha)=\boldsymbol{y}+\alpha\Delta\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}(\alpha)=\boldsymbol{s}+\alpha\Delta\boldsymbol{s}$。

则由式(3)、(6)和方程组(7)中第 3 式得

$$\frac{\boldsymbol{x}(\alpha)\boldsymbol{s}(\alpha)-\boldsymbol{\omega}}{(1-\theta)\mu}=\frac{\boldsymbol{xs}+\alpha\mu\boldsymbol{v}(\boldsymbol{d}_x+\boldsymbol{d}_s)+\alpha^2\dfrac{\mu^2\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{xs}}\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s-\boldsymbol{\omega}}{(1-\theta)\mu}=$$
$$\frac{\boldsymbol{v}^2}{(1-\theta)}+\frac{\alpha}{1-\theta}\boldsymbol{v}[(1-\theta)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}]+\frac{\alpha^2}{1-\theta}\left(\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right)\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s=$$
$$\frac{\boldsymbol{v}^2}{1-\theta}(1-\alpha)+\alpha\left[\boldsymbol{v}+\alpha\frac{\left(\boldsymbol{e}-\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right)}{1-\theta}\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\right]。\tag{11}$$

因为 $\left\|\boldsymbol{e}-\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty\leqslant 1$，由引理 2 得

$$\min\left\{\boldsymbol{v}+\frac{\alpha}{1-\theta}\left(\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right)\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\right\}\geqslant$$
$$\min(\boldsymbol{v})-\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty\geqslant$$
$$1-\delta(\boldsymbol{v})-\frac{1}{1-\theta}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty。\tag{12}$$

又因为 $(1-\alpha)\boldsymbol{v}^2>0$，所以由式(12)、(13)知，若

$$\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty<(1-\theta)(1-\delta(\boldsymbol{v}))，\tag{13}$$

则 $\boldsymbol{x}(\alpha)\boldsymbol{s}(\alpha)-\boldsymbol{\omega}>\boldsymbol{0}$。

由于 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{s}(0)=\boldsymbol{s}>\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{x}(\alpha)$，$\boldsymbol{s}(\alpha)$ 与 α 呈线性关系，对 $\alpha\in[0,1]$，有 $\boldsymbol{x}(\alpha)$，$\boldsymbol{s}(\alpha)>\boldsymbol{0}$。相应地，$\boldsymbol{x}(1)$，$\boldsymbol{s}(1)>\boldsymbol{0}$。证毕。

引理 4 令 $\theta=\dfrac{1}{4\sqrt{n}}$，若 $\delta(\boldsymbol{v})\leqslant\dfrac{3}{5}$，则 $(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{s}^+)\in\boldsymbol{F}^0$。

证明 由式(9)和引理 3 知，若

$$\frac{1}{4}(\delta(\boldsymbol{v})+\sqrt{n}\theta)^2<(1-\theta)(1-\delta(\boldsymbol{v}))，\tag{14}$$

则 $(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{s}^+)\in\boldsymbol{F}^0$。因为 $\theta=\dfrac{1}{4\sqrt{n}}$，所以式(14)可化为

$$\frac{1}{4}\left(\delta(\boldsymbol{v})+\frac{1}{4}\right)^2<\left(1-\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)(1-\delta(\boldsymbol{v}))。\tag{15}$$

当 $\delta(\boldsymbol{v})\leqslant\dfrac{3}{5}$ 时，式(15)成立，即 $(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{s}^+)\in\boldsymbol{F}^0$。

引理 5 令 $\boldsymbol{v}^+:=\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{x}^+\boldsymbol{s}^+-\boldsymbol{\omega}}{\mu^+}}$，则

$$(\boldsymbol{v}^+)^2=\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{e}-\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}}{1-\theta}\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s。$$

证明 由式(11)得

$$(\boldsymbol{v}^+)^2=\frac{\boldsymbol{x}^+\boldsymbol{s}^+-\boldsymbol{\omega}}{\mu^+}=\frac{\boldsymbol{x}(1)\boldsymbol{s}(1)-\boldsymbol{\omega}}{(1-\theta)\mu}=\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{e}-\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}}{(1-\theta)}\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s。$$

引理 6 若 $(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{s}^+)\in\boldsymbol{F}^0$，则

$$\min(\boldsymbol{v}^+)\geqslant\sqrt{1-\delta(\boldsymbol{v})-\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty}。$$

证明 由引理 5 知，

$$(\boldsymbol{v}^+)^2=\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{e}-\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}}{1-\theta}\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s，$$

因此，

$$\min(\boldsymbol{v}^+)^2=\min\left(\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}}{1-\theta}\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\right)\geqslant \min(\boldsymbol{v})-\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty。$$

由引理 2 可得

$$\min(\boldsymbol{v}^+)\geqslant\sqrt{1-\delta(\boldsymbol{v})-\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty}。$$

引理 7 若 $(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{s}^+)\in\boldsymbol{F}^0$，则

$$\|\boldsymbol{e}-(\boldsymbol{v}^+)^2\|\leqslant\|\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}\|+\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|。$$

证明 由引理 5 得

$$\|\boldsymbol{e}-(\boldsymbol{v}^+)^2\|=\left\|\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}-\frac{\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}}{1-\theta}\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\right\|\leqslant \|\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}\|+\frac{1}{1-\theta}\left\|\left(\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right)\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\right\|\leqslant \|\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}\|+\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|。$$

引理 8 令 $\delta(\boldsymbol{v}^+):=\|\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}^+\|$，若 $(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{s}^+)\in\boldsymbol{F}^0$，则

$$\delta(\boldsymbol{v}^+)\leqslant\frac{\|\boldsymbol{e}-(\boldsymbol{v}^+)^2\|}{1+\sqrt{1-\delta(\boldsymbol{v})-\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty}}。$$

证明 由 $\delta(\boldsymbol{v}^+)$ 的定义式(8)得

$$\delta(\boldsymbol{v}^+)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(1-v_i^+)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n\frac{(1-v_i^+)^2(1+v_i^+)^2}{(1+v_i^+)^2}}\leqslant\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n[1-(v_i^+)^2]^2}}{1+\min(\boldsymbol{v}^+)}\leqslant\frac{\|\boldsymbol{e}-(\boldsymbol{v}^+)^2\|}{1+\min(\boldsymbol{v}^+)}。$$

因此，由引理 6 得

$$\delta(\boldsymbol{v}^+)\leqslant\frac{\|\boldsymbol{e}-(\boldsymbol{v}^+)^2\|}{1+\sqrt{1-\delta(\boldsymbol{v})-\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty}}。$$

引理 9 令 $\theta=\frac{1}{4\sqrt{n}}$，若 $\delta(\boldsymbol{v})\leqslant\frac{1}{2}$，则 $\delta(\boldsymbol{v}^+)<\frac{1}{2}$。

证明 由引理 4 可知，若 $\delta(\boldsymbol{v})\leqslant\frac{1}{2}<\frac{3}{5}$，则 $(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{s}^+)\in\boldsymbol{F}^0$。由引理 7、8 得

$$\delta(\boldsymbol{v}^+)\leqslant\frac{\|\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}\|+\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|}{1+\sqrt{1-\delta(\boldsymbol{v})-\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty}}。$$

由式(9)、(＊)可知，

$$\delta(\boldsymbol{v}^+)\leqslant\frac{\delta(\boldsymbol{v})+\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\times\frac{\sqrt{2}}{4}(\delta(\boldsymbol{v})+\sqrt{n}\theta)^2}{1+\sqrt{1-\delta(\boldsymbol{v})-\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\times\frac{1}{4}(\delta(\boldsymbol{v})+\sqrt{n}\theta)^2}}。\tag{16}$$

因为 $\theta=\frac{1}{4\sqrt{n}}$，$\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty\leqslant1$，所以

$$\frac{\delta(\boldsymbol{v})+\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\times\frac{\sqrt{2}}{4}(\delta(\boldsymbol{v})+\sqrt{n}\theta)^2}{1+\sqrt{1-\delta(\boldsymbol{v})-\frac{\left\|\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right\|_\infty}{1-\theta}\times\frac{1}{4}(\delta(\boldsymbol{v})+\sqrt{n}\theta)^2}}\leqslant\frac{\delta(\boldsymbol{v})+\frac{\sqrt{2}}{4\left(1-\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)}\left(\delta(\boldsymbol{v})+\frac{1}{4}\right)^2}{1+\sqrt{1-\delta(\boldsymbol{v})-\frac{1}{4\left(1-\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)}\left(\delta(\boldsymbol{v})+\frac{1}{4}\right)^2}}。\tag{17}$$

又因式(17)的右端函数关于 $\delta(\boldsymbol{v})$ 单调增加，故当 $\delta(\boldsymbol{v})\leqslant\frac{1}{2}$ 时，有

$$\frac{\delta(\boldsymbol{v})+\frac{\sqrt{2}}{4\left(1-\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)}\left(\delta(\boldsymbol{v})+\frac{1}{4}\right)^2}{1+\sqrt{1-\delta(\boldsymbol{v})-\frac{1}{4\left(1-\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)}\left(\delta(\boldsymbol{v})+\frac{1}{4}\right)^2}}\leqslant\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4\left(1-\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4\left(1-\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2}}<\frac{1}{2}。\tag{18}$$

当 $\delta(\boldsymbol{v})\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由式(16)、(17)、(18)得 $\delta(\boldsymbol{v}^+)<$

$\frac{1}{2}$。

2.2 复杂度分析

引理 10 令 $\theta=\frac{1}{4\sqrt{n}}$,若 $\delta(\boldsymbol{v})\leqslant\frac{3}{5}$,则 $(\boldsymbol{x}^+\boldsymbol{s}^+-\boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^+\boldsymbol{s}^+-\boldsymbol{\omega})\leqslant(2(1-\theta)n\mu)^2$。

证明 由 $\boldsymbol{v}^+=\sqrt{\frac{\boldsymbol{x}^+\boldsymbol{s}^+-\boldsymbol{\omega}}{\mu^+}}$ 得

$$(\boldsymbol{x}^+\boldsymbol{s}^+-\boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^+\boldsymbol{s}^+-\boldsymbol{\omega})=(\mu^+)^2[(\boldsymbol{v}^+)^2]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}^+)^2=(\mu^+)^2\sum_{i=1}^{n}v_i^4\leqslant[(1-\theta)\mu\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}^+)^2]^2。\quad(19)$$

又由引理 5 得

$$(1-\theta)\mu\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}^+)^2=(1-\theta)\mu\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}}{1-\theta}\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\right]=(1-\theta)\mu\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}+\mu\left(\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{xs}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\leqslant(1-\theta)n\mu\|\boldsymbol{v}\|_\infty+n\mu\|\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{d}_s\|_\infty。\quad(20)$$

则根据式(12)、(21)和引理 2 可知,

$$(\boldsymbol{x}^+\boldsymbol{s}^+-\boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^+\boldsymbol{s}^+-\boldsymbol{\omega})\leqslant[(1-\theta)n\mu(1+\delta(\boldsymbol{v}))+(1-\theta)n\mu(1-\delta(\boldsymbol{v}))]^2\leqslant[2(1-\theta)n\mu]^2。$$

引理 11 令 $\theta=\frac{1}{4\sqrt{n}}$,$\delta(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{s}^0;\mu^0)\leqslant\frac{1}{2}$,则算法 1 至多经

$$\left\lceil 4\sqrt{n}\log\frac{2n\mu^0}{\varepsilon}\right\rceil$$

次迭代,才能得到 LWCP(1)的 ε- 近似解。

证明 因为 $\delta(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{s}^0;\mu^0)\leqslant\frac{1}{2}$,所以由引理 10 得

$$(\boldsymbol{x}^1\boldsymbol{s}^1-\boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^1\boldsymbol{s}^1-\boldsymbol{\omega})\leqslant[2(1-\theta)n\mu^0]^2。$$

因此要使 $\|\boldsymbol{x}^k\boldsymbol{s}^k-\boldsymbol{\omega}\|\leqslant\varepsilon$,只需

$$(\boldsymbol{x}^k\boldsymbol{s}^k-\boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^k\boldsymbol{s}^k-\boldsymbol{\omega})\leqslant[2(1-\theta)n\mu^{k-1}]^2=[2(1-\theta)^kn\mu^0]^2。$$

从而当 $2(1-\theta)^kn\mu^0\leqslant\varepsilon$ 时,有 $\|\boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}\|\leqslant\varepsilon$,故迭代次数的上界为 $\left\lceil 4\sqrt{n}\log\frac{2n\mu^0}{\varepsilon}\right\rceil$。

3 数值算例

为检验算法 1 的有效性,运用 MATLAB R2016b 编程,在 Intel® Core i5 CPU 2.3 GHz,8.0 GiB 内存,IOS 操作系统的计算机上进行数值实验。随机生成 5 个不同规模的 LWCP(1),对每种规模产生 10 个问题进行求解。

任意选取参数 $\mu_0>0$,起始点 $(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{s}^0)$ 及权向量 $\boldsymbol{\omega}\geqslant\boldsymbol{0}$,使得 $\delta(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{s}^0;\mu^0)\leqslant\tau$。随机生成行满秩矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$。令 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Ax}^0$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^0+\boldsymbol{s}^0$,即初始点满足内点条件。算法的终止条件为 $\|\boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}\|\leqslant\varepsilon$,记 Gap$=\|\boldsymbol{xs}-\boldsymbol{\omega}\|$。在算法 1 中取参数 $\mu^0=1$,$\varepsilon=10^{-5}$,$\tau=\frac{1}{2}$,$\theta=\frac{1}{4\sqrt{n}}$。表 1 为算法 1 求解不同规模的 LWCP(1)的数值结果,其中数据为 10 次结果的平均值。

表 1 求解不同规模线性权互补问题的数值结果

m	n	Iter	Time/s	Gap
10	20	227	0.022	9.537×10^{-6}
20	30	283	0.068	9.923×10^{-6}
30	50	375	0.221	9.710×10^{-6}
50	100	546	1.043	9.920×10^{-6}
100	200	795	4.779	9.927×10^{-6}

例 1 考虑 $\mathbf{R}^3$ 上的 LWCP(1),其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}。$$

初始点 $\boldsymbol{x}^0=(3,2,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{s}^0=(2,3,2)^{\mathrm{T}}$,$\mu^o=1$,$\boldsymbol{y}^0=(0,0)^{\mathrm{T}}$,使得 $\delta(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{s}^0;\mu^0)\leqslant\frac{1}{2}$。对该问题运用算法 1 进行求解,迭代 78 次后得到最优解:

$\boldsymbol{x}^*=(2.477,1.477,2.000)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}^*=(0.385,0.499)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{s}^*=(1.615,3.385,1.500)^{\mathrm{T}}$。图 1 为迭代过程中邻近测度及 Gap 的值。从图 1 可看出,随着 μ 的减小,邻近测度和 Gap 逐渐减小,并趋于 0。

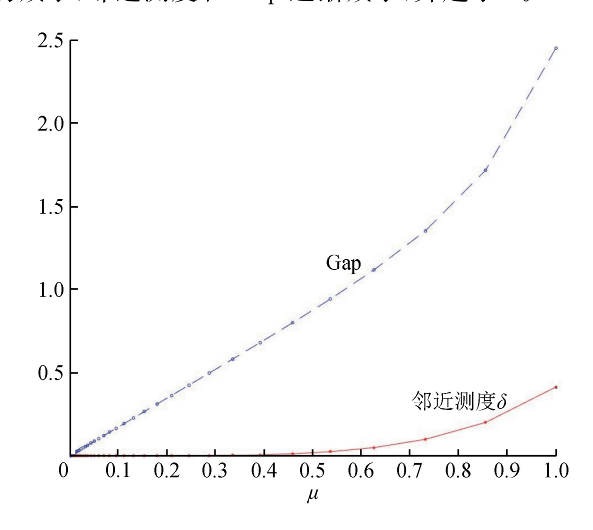


图 1 迭代过程中邻近测度及 Gap 的值

4 结束语

提出了求解一类线性权互补问题的一种修正全牛顿步内点算法。该算法基于中心路径的等价变换，得到搜索方向。证明了算法经过修正全牛顿步后生成的迭代点仍严格可行，且具有多项式时间复杂度。数值算例表明了算法的可行性。

参考文献：

[1] POTRA F A. Weighted complementarity problems: a new paradigm for computing equilibria[J]. SIAM Journal on Optimization, 2012, 22(4): 1634-1654.

[2] POTRA F A. Sufficient weighted complementarity problems[J]. Computational Optimization and Applictions, 2016, 64(2): 467-488.

[3] 迟晓妮，曾荣，刘三阳，等. 对称锥权互补问题的正则化非单调非精确光滑牛顿法[J]. 数学物理学报，2021，41(2)：507-522.

[4] KOJIMA M, MIZUNO S, YOSHISE A. A polynomial-time algorithm for a class of linear complementarity problems[J]. Mathematical Programming, 1989, 44(1/2/3): 1-26.

[5] KOJIMA M, MIZUNO S, YOSHISE A. An $O(\sqrt{n}L)$ iteration potential reduction algorithm for linear complementarity problems[J]. Mathematical Programming, 1991, 50(1-3): 331-342.

[6] ROOS C, TERLAKY T, VIAL J P. Theory and Algorithm for Linear Optimization: an Interior Point Approach[M]. New Jersey: John Wiley and Sons, 1997.

[7] ZHANG L P, XU Y H. A full-Newton step interior-point algorithm based on modified Newton direction[J]. Operations Research Letters, 2011, 39(5): 318-322.

[8] XU Y H. A full-modified-Newton step infeasible interior-point algorithm for linear optimization[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2016, 12: 103-116.

[9] 迟晓妮，刘文丽，刘三阳，等. 线性二阶锥权互补问题的非精确非单调光滑化牛顿法[J]. 吉林大学学报(理学版)，2021，59(2)：263-270.

[10] 张睿婕，迟晓妮，刘文丽. 线性权互补问题基于核函数的全牛顿步可行内点算法[J]. 桂林电子科技大学学报，2020，40(6)：533-538.

[11] CHI X N, WEI H J, WAN Z P, et al. Smoothing Newton algorithm for the circular cone programming with a nonmonotone line search[J]. Acta Mathematica Scientia(English Series), 2017, 37(5): 1262-1280.

[12] 韩继业，修乃华，戚厚铎. 非线性互补理论与算法[M]. 上海：上海出版社，2006.

[13] ZHANG J. A smoothing Newton algorithm for weighted linear complementarity problem[J]. Optimization Letters, 2016, 10(3): 499-509.

[14] 迟晓妮，张睿婕，刘三阳. 线性权互补问题的新全牛顿步可行内点算法[J]. 应用数学，2021，34(2)：304-311.

[15] ASADI S, DARVAY Z, LESAJA G, et al. A full-Newton step interior-point method for monotone weighted linear complementarity problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2020, 186(3): 864-878.

编辑：张所滨